OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
26 ianuarie 2013

CLASA A XI-A
Programa M1

1.) Ştiind că limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(an-\sqrt{n^2+bn+c}\right)$ este finită, să se determine $a, b, c \in R$.

2.) Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: 2,4,1,3,6,8,5,7,10,12,9,11,…

a) Aflaţi al 2013-lea termen al şirului.

b) Decideţi dacă 2013 este termen al şirului.

3.) Fie ecuaţia $X^2=\begin{pmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{pmatrix}$, $X\in M_2(\mathbb{C})$

a) Să se rezolve ecuaţia.

b) Dacă $X_{1,2,3,4}$ sunt soluţiile ecuaţiei să se calculeze $X_1^{2013}+X_2^{2013}+X_3^{2013}+X_4^{2013}$.

4.) Fie mulţimea de matrici M = $\{A\in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \,/\, A^3-A=O_3\}$.

a) Să se demonstreze că dacă $A\in M$ şi $\det A\neq 0$, atunci $A^*\in M$, unde A^* este adjuncta matricei A.

b) Să se demonstreze că mulţimea M are cel puţin patru elemente.

c) Să se demonstreze că dacă $A\in M$ şi $\det(A-I_3)\neq 0$, atunci $\det(A^2+A+2\cdot I_3)=8$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore